

Approches théoriques et pratiques du flou photographique

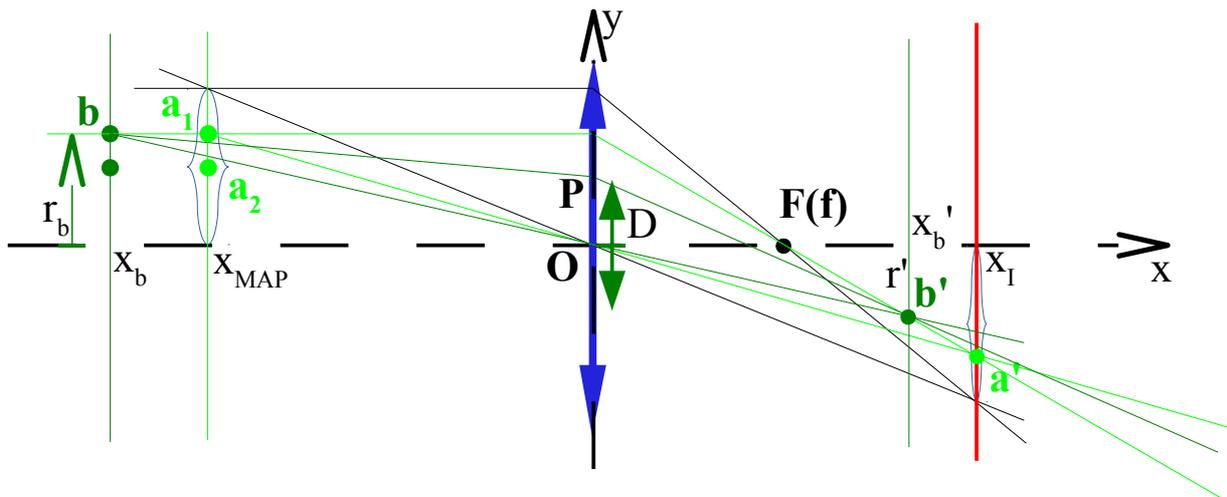


Figure 1

O : centre optique de l'objectif (assimilé à une lentille plane), pris comme origine de l'axe optique orienté.

F est le foyer du côté image, à l'abscisse $f > 0$ (le second foyer F_o , du côté objet, à l'abscisse $-f$ n'est pas représenté).

a : point courant du plan objet, sur lequel la mise au point est faite, à l'abscisse $x = x_{map} < 0$. a' son image, dans le plan image, est un point à l'abscisse $x' = x_I$.

b point courant du champ visuel, à l'abscisse x , au-delà de F_o . Par définition b est dans le plan xOy avec $y > 0$ et le trièdre est complété par Oz pour être direct. b' son image, à l'abscisse $x_b' \neq x_I$, est un point situé en dehors du plan image.

D ouverture physique (= diamètre du diaphragme (flèche verte)) exprimée en mètres (m).

L'ouverture au sens photo habituel est $N = f/D$ (valeur sans dimension, qui devrait plutôt être appelée la focale relative).

Sommaire

Résumé.....	2
L'image d'un point.....	3
Détermination des coordonnées du point b'	3
Dimension de la tache représentant b sur le plan image.....	3
Approximation des grandes distances.....	4
Remarque.....	5
La sensation de flou.....	6
Critère de netteté photographique.....	6
Résolution dans l'approximation des grandes distances.....	7
Perception du flou sur un support et cercle de confusion.....	9
Influence des pixels.....	10
Annexes.....	11
Annexe 1 : comparaison théorie – expérience (critère angulaire).....	12
Annexe 2 : l'hyperfocale par la bague de mise au point.....	13

~.~.~

Résumé

Cette fiche rassemble les bases mathématiques nécessaires à la caractérisation du flou photo, sous l'hypothèse simplificatrice que l'objectif est une lentille plane.

L'abscisse du plan image est liée à l'abscisse de mise au point par : $x_I = \left[\frac{x_{MAP}}{x_{MAP} + f} \right] f$. Dans le plan image, le point courant b du volume objet est représenté par une tache circulaire de rayon

$$B' = \frac{|x_{MAP} - x_b|}{x_b x_{MAP} (1 + f/x_{MAP})} \frac{f D}{2}. \text{ Lorsque l'on s'intéresse à des objets placés à des distances grandes par}$$

rapport à la focale, ce rayon est environ : $B' \approx f \frac{|x_{MAP} - x_b|}{x_b x_{MAP}} \frac{D}{2}$, nul en x_{MAP} .

La sensation de flou résulte de propriétés locales et, plus précisément, de la possibilité de discerner des points voisins dans une certaine région de l'image. Le critère habituel met en jeu le pouvoir séparateur de l'œil et les paramètres de la photographie. Il énonce que le flou est présent lorsqu'il y a confusion entre les taches représentatives de deux points voisins, qui se produit lorsque la distance entre leurs centres est inférieure à leur rayon. A partir de là, dans l'approximation des grandes distances, il est possible de calculer

que la zone nette sur l'image s'étend de la limite proche de netteté, à distance $d_P \approx \frac{d_{MAP}}{1 + n \alpha N \frac{d_{MAP}}{f}}$, à la

limite lointaine de netteté, à $d_L \approx \frac{d_{MAP}}{1 - n \alpha N \frac{d_{MAP}}{f}}$, où d_{MAP} est la distance de mise au point, n un

paramètre constant égal à 2, α est l'angle de résolution minimal choisi (0,2 ou $0,3 \cdot 10^{-3}$ rd), N est l'ouverture du diaphragme (« cran F ») et f la focale de l'objectif. La profondeur de champ, différence entre ces deux valeurs de distance, ne se répartit pas également autour du plan de mise au point ; elle est plus grande à l'arrière.

Lorsque la limite lointaine de netteté est placée exactement à l'infini, la distance de mise au point (mesurée depuis le plan film) est très proche de $d_{Hyp} \approx \frac{f}{n \alpha N}$, valeur dite « hyperfocale », et la zone de netteté commence à la moitié de cette distance.

Pour apprécier la netteté d'une image présentée sur un support, il est d'usage de préférer un critère de distance dans l'image à celui angulaire, en faisant intervenir le « cercle de confusion », défini comme « le cercle de diamètre tel que, l'objectif étant mis au point à l'hyperfocale, si la tache représentative (dans le plan film) d'un point lumineux situé à l'infini est centrée dans ce cercle, alors la tache représentative d'un deuxième point lumineux à l'infini en sera indiscernable si son centre est placé à l'intérieur du cercle » ; le diamètre du cercle de confusion dans le plan image peut être calculé, en conséquence de sa définition, par la formule $c = n \alpha f$ après avoir choisi un angle minimal de résolution et une focale de référence. Ainsi, le cercle de confusion n'est pas une propriété optique absolue mais plutôt un choix d'une évaluation acceptable du pouvoir séparateur.

Par ailleurs, le cercle de confusion possède la propriété d'avoir le même diamètre que la tache représentative d'un point situé à l'infini lorsque l'objectif est mis au point à l'hyperfocale. On a donc

$$c = 2 B'_{\infty Hyp} \approx \frac{f^2}{N d_{Hyp}}, \text{ d'où découle une autre expression de la distance hyperfocale, en fonction du}$$

cercle de confusion : $d_{Hyp} \approx \frac{f^2}{N c}$. A défaut d'idée précise sur l'angle de résolution souhaitable pour

chaque utilisation, les ordres de grandeurs suivants sont applicables aux capteurs modernes : compacts à petits capteurs de diagonale 7 à 10 mm : $c \approx 6 \mu\text{m}$, « micro 4/3 » et hybrides de diagonale 21,6 mm : $c \approx 15 \mu\text{m}$, APS des réflexes amateurs, de diagonale 25 à 28 mm : $c \approx 20 \mu\text{m}$, « plein format » 24x36, de diagonale 43,3 mm : $c \approx 30 \mu\text{m}$.

L'image d'un point

Détermination des coordonnées du point b'

Sachant que le point courant du volume est $b(x_b, r_b, 0)$, le point b' est déterminé par l'intersection

- du rayon lumineux venant de l'infini, passant par b , parallèle à l'axe optique jusqu'à la lentille puis passant par le foyer, d'équation

$$y = r_b \left(1 - \frac{x}{f}\right), \text{ et}$$

- du rayon lumineux passant par b et le centre de l'optique, d'équation :

$$y = \frac{r_b}{x_b} \cdot x.$$

La position longitudinale de b' est donc obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$r_b \left(1 - \frac{x}{f}\right) = \frac{r_b}{x_b} \cdot x \quad \text{d'où :} \quad x_{b'} = \left[\frac{x_b}{x_b + f} \right] f$$

$$\text{et sa position radiale est alors donnée par :} \quad y_{b'} = \left[\frac{f}{x_b + f} \right] r_b = -r_{b'} < 0.$$

Si la mise au point est faite sur le plan du point a , à l'abscisse x_{MAP} , par le même calcul, le plan image où est formée l'image nette est à l'abscisse :

$$x_I = \left[\frac{x_{MAP}}{x_{MAP} + f} \right] f.$$

Quand la distance de mise au point est à l'infini ($x_{MAP} = -\infty$), le plan image passe au foyer F . Le second foyer F_0 ne peut pas avoir une image nette à distance finie (dénominateur nul).

Dimension de la tache représentant b sur le plan image

Sur le plan image, le point b est représenté par une tache elliptique délimitée par l'intersection entre le plan image et le cône de sommet b' appuyé sur le contour du diaphragme, supposé circulaire. En admettant que le diaphragme soit dans le plan origine, le point courant P de son contour a pour

coordonnées cylindriques ($r = \frac{D}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $x = 0$), en comptant l'angle polaire à partir de l'axe

Oy.

Dans le repère $Oxyz$, le vecteur $\underline{Pb'}$ a pour composantes :

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_b f}{x_b + f} - 0 \\ \frac{r_b f}{x_b + f} - \frac{D}{2} \cos(\theta) \\ 0 - \frac{D}{2} \sin(\theta) \end{bmatrix},$$

et la droite Pb' de point courant $M(X, Y, Z)$ a pour équations paramétriques :

$$\begin{bmatrix} X - \frac{x_b f}{x_b + f} \\ Y - \frac{r_b f}{x_b + f} \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{x_b f}{x_b + f} \\ \frac{r_b f}{x_b + f} - \frac{D}{2} \cos(\theta) \\ \frac{D}{2} \sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

Le paramètre de son point d'intersection avec le plan image satisfait :

$$x_I - \frac{x_b f}{x_b + f} = \lambda \cdot \frac{x_b f}{x_b + f} \quad \text{d'où} \quad \lambda = x_I \cdot \frac{x_b + f}{x_b f} - 1, \quad \text{soit} \quad \lambda_I \quad \text{cette valeur.}$$

Dans le plan image, le contour de la tache représentant le point b a donc pour équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{r_b f}{x_b + f} + \lambda_I \left(\frac{r_b f}{x_b + f} - \frac{D}{2} \cos(\theta) \right) \\ z = \lambda_I \left(\frac{D}{2} \sin(\theta) \right) \end{array} \right\}$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = r_b \left[\frac{f}{x_b + f} + \left(\frac{x_I}{x_b} - \frac{f}{x_b + f} \right) \right] - \lambda_I \frac{D}{2} \cos(\theta) \\ z = \lambda_I \frac{D}{2} \sin(\theta) \end{array} \right\}.$$

Il s'agit donc d'un cercle de centre $(y = r_b \left[\frac{f}{x_b + f} + \left(\frac{x_I}{x_b} - \frac{f}{x_b + f} \right) \right], z = 0)$ et de rayon

$$B' = |\lambda_I| \frac{D}{2} = \left| x_I \cdot \frac{x_b + f}{x_b f} - 1 \right| \frac{D}{2} = \left| \frac{x_{MAP}}{x_b} \cdot \frac{x_b + f}{x_{MAP} + f} - 1 \right| \frac{D}{2} \quad (1)$$

c'est-à-dire, compte tenu des hypothèses faites ($x_{MAP} < -f < 0$ donc $1 + f/x_{MAP} > 0$) :

$$B' = \frac{|x_{MAP} - x_b|}{x_b x_{MAP} (1 + f/x_{MAP})} \frac{f D}{2}.$$

Comme il se doit, ce rayon est nul si b est dans le plan de mise au point.

Si b est hors de ce plan, sa tache image est de rayon proportionnel au diamètre du diaphragme et croissant en fonction de la focale.

Approximation des grandes distances

L'expression (1) du rayon de la tache peut être reformulée comme suit :

$$B' = \left| \frac{1 + f/x_b}{1 + f/x_{MAP}} - 1 \right| \frac{D}{2}.$$

Dans l'approximation des grandes distances, la mise au point est faite à une distance grande devant f et la zone d'intérêt est également à distance grande devant f. Il est donc possible de considérer le

ratio $\varepsilon = \frac{f}{x_{MAP}}$ comme un petit paramètre et

$$B' = \left| \frac{1 + \varepsilon x_{MAP}/x_b}{1 + \varepsilon} - 1 \right| \frac{D}{2}.$$

La parenthèse se développe par rapport au petit paramètre :

$$B' = \left| (1 + \varepsilon x_{MAP}/x_b)(1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)) - 1 \right| \frac{D}{2} = \varepsilon \left| \frac{x_{MAP}}{x_b} - 1 \right| \frac{D}{2} + O(\varepsilon^2).$$

Au second ordre près, il s'ensuit donc que le rayon de la tache est proportionnel à la focale et au diamètre du diaphragme, et fortement sensible à l'éloignement de b par rapport au plan de mise au point :

$$B' \approx f \frac{|x_{MAP} - x_b|}{x_b x_{MAP}} \frac{D}{2}.$$

En introduisant l'ouverture relative de l'objectif, $N=f/D$, cette expression prend la forme suivante :

$$B' \approx \frac{|x_b - x_{MAP}|}{x_b x_{MAP}} \frac{f^2}{2N} .$$

Pour des sujets constants placés à grande distance, cette forme montre que la tache représentative d'un point est proportionnelle au rapport du carré de la focale à la valeur « ouverture » gravée sur l'objectif .

Remarque

Le photographe n'a pas forcément une connaissance très précise de la position du centre optique de l'objectif (qui n'est en général pas une lentille plane :-). En revanche, la position du plan film est mieux connue et souvent même tracée sur les boîtiers.

La distance que mesure donc le photographe est $d = x_I - x$, d'où :

$$B' = \frac{|d_b - d_{MAP}|}{(x_I - d_b)(x_I - d_{MAP})(1 + f/(x_I - d_{MAP}))} \frac{f D}{2}$$

sachant que :

$$x_I^2 - d_{MAP} x_I + d_{MAP} f = 0 .$$

Cette équation du second degré en x_I a pour discriminant :

$$\Delta = d_{MAP}^2 - 4 d_{MAP} f = d_{MAP}^2 \left(1 - 4 \frac{f}{d_{MAP}}\right)$$

et x_I est la plus petite des deux racines positives donc :

$$x_I = d_{MAP} \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \frac{f}{d_{MAP}}}}{2} .$$

Dans l'approximation des grandes distances, on retrouve que x_I est voisine de la focale :

$$x_I = f \left(1 + \frac{f}{d_{MAP}} + O\left(\left(\frac{f}{d_{MAP}}\right)^2\right)\right) .$$

Ce résultat met aussi en évidence que, dans la plupart des situations courantes, le centre de l'objectif est, sur l'avant du plan film, à une distance voisine de la focale.

La sensation de flou

Les considérations précédentes sont relatives à la caractérisation géométrique de l'image d'un point unique.

La caractérisation de la sensation de flou doit faire intervenir plusieurs points. En effet, Monsieur de la Palisse pourrait dire que la vision est floue lorsqu'elle n'est pas nette et elle paraît nette lorsqu'il est possible de distinguer finement des points voisins. Dès lors, cette notion fait à la fois intervenir des éléments physiques objectifs et des éléments subjectifs car toutes les personnes n'ont pas les mêmes capacités visuelles.

Du côté subjectif (=dépendant du sujet) de la question intervient le pouvoir séparateur de l'œil. Les spécialistes de la vision expliquent que, en raison de la diffraction lumineuse, même un point parfait n'apparaît jamais tel sur la rétine. Dès lors, pour que l'œil puisse distinguer deux points voisins, il faut que les pics lumineux soient séparés au moins d'une certaine distance sur la rétine. Ceci implique que les sources lumineuses soient séparées par un certain angle de vision, définissant le pouvoir séparateur de l'œil.

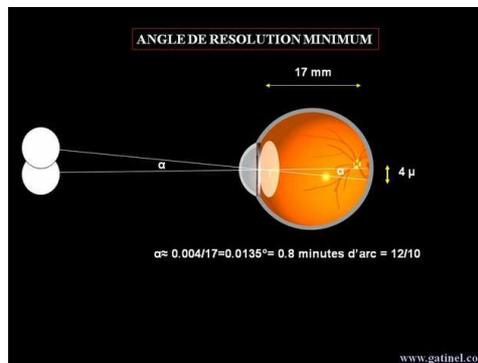


Figure 2 : image proposée par le Dr GATINEL (<http://www.gatinel.com>)

Ainsi, selon le Dr GATINEL, l'angle de résolution minimal peut être pris égal à

$$\alpha = 0,000\ 235 \text{ rd} = 0,013\ 5^\circ.$$

Du côté objectif (=indépendant du sujet observant), il faut prendre en compte que les sources ne sont pas vues directement mais par l'intermédiaire d'un acte de photographie qui, après un processus complexe de prise de vue et traitement, donne à voir les sources lumineuses à l'œil sur un écran ou un papier. Si deux sources réelles ponctuelles sont rendues sur la photo par deux taches en fort recouvrement, la meilleure acuité visuelle ne permettra pas de les séparer. Réciproquement, si elles sont rendues par deux points parfaits mais sur une photo placée si loin de l'œil qu'elles seront vues sous un angle très petit, l'œil ne pourra quand même pas les séparer.

Critère de netteté photographique

Une définition quantitative de la netteté devrait donc exprimer un équilibre entre les deux points de vue objectif et subjectif.

La compréhension que ce sont les angles qui gouvernent le pouvoir séparateur incite à rechercher une formulation angulaire d'un critère de netteté.

Pour cela, soit b_1 et b_2 deux points voisins d'un plan normal à l'axe optique, juste séparés par l'angle de résolution minimal α . Comme cela a été vu plus haut, ces points apparaissent comme deux taches sur le plan image (on se place ici dans l'approximation continue – l'effet de pixelisation sera examiné plus loin).

En supposant, pour simplifier les calculs, que ces points sont proches de l'axe optique et sur un même rayon vecteur perpendiculaire à Ox , la petite distance qui les sépare est : $dr_b = \alpha \cdot x_b$. D'après

les résultats obtenus plus haut, leurs images dans le plan image sont alors séparées de :

$$dy = \alpha x_b \left[\frac{f}{x_b + f} + \left(\frac{x_I}{x_b} - \frac{f}{x_b + f} \right) \right]$$

En adoptant un critère cohérent avec celui utilisé pour calculer l'angle de résolution minimal (critère de Rayleigh), ces deux taches sont perçues comme des points discernables tant que cette distance reste supérieure à leur rayon (chevauchement permis). Ceci est illustré par la figure suivante.

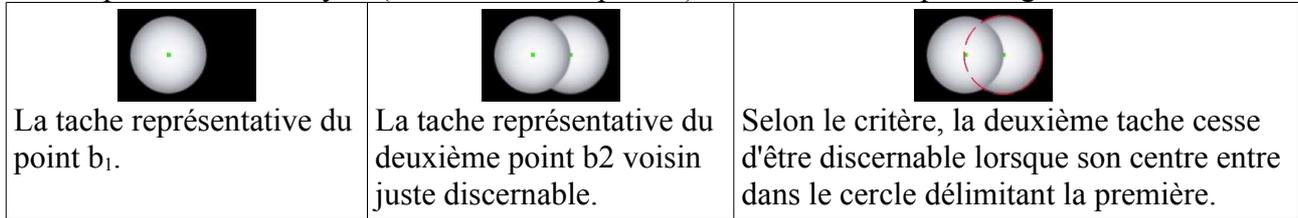


Figure 3 : confusion des taches du plan image représentatives de deux points.

Le critère choisi énonce donc qu'il y a confusion des deux taches lors que le centre de la deuxième entre à l'intérieur du cercle représentant la première. Ceci explique l'origine de l'expression « cercle de confusion », sur laquelle on revient plus loin.

Remarque

Un autre critère imaginable (moins cohérent avec la démarche antérieure) aurait été de s'interdire tout chevauchement, avec un écart entre les centres des taches restant supérieur à leur diamètre.

Suivant le choix de critère fait, leur confusion se produit à l'égalité : $dy = B'$ ou $2B'$, c'est-à-dire :

$$\alpha x_b \left[\frac{f}{x_b + f} + \left(\frac{x_I}{x_b} - \frac{f}{x_b + f} \right) \right] = \frac{|x_{MAP} - x_b|}{x_b x_{MAP} (1 + f/x_{MAP})} \frac{f D}{n}$$

Avec $n = 2$ si le **chevauchement est autorisé** ou $n=1$ sinon. Cette égalité fournit une équation pour les valeurs de x_b délimitant la profondeur de champ. Dans la suite, la valeur $n=2$ est adoptée mais la présence explicite de n est conservée pour bien mettre en évidence le rôle joué par ce critère.

Résolution dans l'approximation des grandes distances

Dans l'approximation des grandes distances, la mise au point étant réglée sur une distance finie mais grande, d'une part, le diamètre de la tache est environ :

$$B' \approx f \frac{|x_{MAP} - x_b|}{x_b x_{MAP}} \frac{D}{2}$$

et, d'autre part, le premier membre de l'équation est approché par :

$$\alpha f \left[\frac{1}{1 + (f/x_b)} + \left(\frac{1}{1 + (f/x_{MAP})} - \frac{1}{1 + (f/x_b)} \right) \right] \approx \alpha f \left[1 - \frac{f}{x_{MAP}} \right]$$

En conséquence, l'équation approchée est :

$$\frac{n}{D} \alpha \left[1 - \frac{f}{x_{MAP}} \right] x_b x_{MAP} = |x_{MAP} - x_b|$$

et il y a donc deux solutions :

- si $x_b < x_{MAP}$ (< 0), c'est-à-dire b plus loin que le plan de mise au point, l'équation s'écrit :

$$\frac{n}{D} \alpha \left[1 - \frac{f}{x_{MAP}} \right] x_b x_{MAP} = x_{MAP} - x_b \quad \text{d'où} \quad x_b = x_{bL} = \frac{x_{MAP}}{1 - \frac{n\alpha}{D} |x_{MAP} - f|}$$

- si $x_{MAP} < x_b$ (< 0), c'est-à-dire b plus proche que le plan de mise au point, l'équation s'écrit :

$$\frac{n}{D} \alpha \left[1 - \frac{f}{x_{MAP}} \right] x_b x_{MAP} = x_b - x_{MAP} \quad \text{d'où} \quad x_b = x_{bP} = \frac{x_{MAP}}{1 + \frac{n\alpha}{D} |x_{MAP} - f|}$$

Plusieurs observations intéressantes peuvent être faites sur ce résultat.

- D'abord, la profondeur de champ ne se répartit pas également de part et d'autre du plan de mise au point : la limite lointaine en est plus éloignée que la limite proche.
- Ensuite, lorsque la mise au point est faite de façon à caler la limite lointaine à l'infini, cela signifie que $\frac{n \alpha}{D} |x_{MAP} - f| = 1$ et cette égalité entraîne deux conséquences. D'une part, la limite proche de netteté est simplement donnée (quel que soit n) par :

$$x_{bP} = \frac{x_{MAP}}{2} ,$$

D'autre part, la mise au point (alors dite « à l'hyperfocale ») est caractérisée par :

$$x_{MAP} = -\frac{D}{n \alpha} + f = f \left(-\frac{1}{n \alpha N} + 1 \right) .$$

- Enfin, quand b part à l'infini, x_b tend vers $-\infty$, le rayon de la tache B' tend vers

$$B'_{\infty} = \frac{f D}{2 |x_{MAP}|} \approx \frac{f D}{2 d_{MAP}} = \frac{f^2}{2 N d_{MAP}} . \quad (2)$$

Par ailleurs, comme vu plus haut, dans l'approximation des grandes distances, l'abscisse du plan film est voisine de f, donc le passage des abscisses aux distances se fait par $d \approx f - x$. Ainsi, la distance de mise au point **hyperfocale**, mesurée depuis le plan film, est bien approchée par une formule extrêmement simple :

$$d_{Hyp} = x_I - x_{MAP} \approx \frac{D}{n \alpha} \quad \text{c'est-à-dire} \quad d_{Hyp} \approx \frac{f}{n \alpha N}$$

et la mise au point à cette distance donne une zone de netteté de environ la moitié de cette distance à l'infini.

Pour une mise au point à une autre distance d_{MAP} (plus proche mais encore grande devant f), la profondeur de champ s'étend environ :

$$\text{de } d_P \approx \frac{d_{MAP}}{1 + n \alpha N \frac{d_{MAP}}{f}} \quad \text{à} \quad d_L \approx \frac{d_{MAP}}{1 - n \alpha N \frac{d_{MAP}}{f}} .$$

Application numérique pour l'hyperfocale

Avec chevauchement admis dans le critère (n=2), un objectif de 200 mm de focale, ouvert à 4, avec une mise au point réglée à :

$$d_{MAP} = d_{Hyp} = 0,2 m \left(\frac{1}{2 \cdot 0,235 \cdot 10^{-3} \cdot 4} \right) \approx 106 m$$

donne une profondeur de champ de environ 53 m à l'infini.

Remarque : sans chevauchement (n = 1), réglé à : $d_{MAP} = d_{Hyp} = 0,2 m \left(\frac{1}{0,235 \cdot 10^{-3} \cdot 4} \right) \approx 212 m$, il aurait

donné une profondeur de champ de 106 m à l'infini. La forme « sans chevauchement » du critère est donc plus sévère (plus pessimiste sur la netteté) que « avec », puisqu'elle conduit à considérer que la zone de netteté est moins étendue.

Avec chevauchement (n=2), un objectif de 55 mm de focale, ouvert à 2, avec une mise au point réglée à :

$$d_{MAP} = 0,055 m \left(\frac{1}{2 \cdot 0,235 \cdot 10^{-3} \cdot 2} \right) \approx 58 m$$

donne une profondeur de champ de environ 29 m à l'infini.

Perception du flou sur un support et cercle de confusion

Les développements précédents n'ont pas requis le recours à la notion de « cercle de confusion » puisqu'ils ont reposé uniquement sur l'approche angulaire. Ceci montre que le « cercle de confusion » n'est pas un intermédiaire obligatoire pour énoncer un critère de netteté. C'est seulement lorsqu'on s'intéresse à la perception du flou sur un support de taille donnée que cette notion s'avère en fait utile.

Le destin d'une photographie est d'être présentée sur un support, disons sous la forme d'un tirage papier pour fixer les idées.

En cohérence avec la détermination angulaire de la sensation de netteté/flou, il y a une relation entre la dimension du tirage et la distance d'examen de l'image. Une image de dimension double à une distance double donne la même sensation que l'image de référence ; rapprochée, elle semble moins nette.

Pour que le critère de netteté *angulaire* précédemment élaboré prenne tout son sens, il faudrait conserver, à l'observation de la photo, les mêmes angles qu'à la prise de vue. Par le théorème de Thalès, il faudrait donc que la distance d'observation d_{obs} soit à la focale dans le même rapport que la taille du tirage (diagonale DT) à la dimension du capteur (diagonale DC) :

$$d_{obs} = f \frac{DT}{DC} ,$$

un examen plus proche augmentant la sensation de flou (et ce n'est pas une affaire de pixels).

Applications numériques

Pour un APS-C Sony de taille 23,5 mm x 15,6 mm (diagonale de 28,2 mm) et un tirage au format 30 cm x 20 cm (diagonale de 361 mm), le ratio image/capteur est environ 12,8. En conséquence, une image prise à la focale 200 mm devrait être observée à la distance de 2,55 m ; pour la focale de 55 mm, cette distance serait de 0,7 m.

Pour un tirage de 9,9 cm x 6,6 cm (comme sur la planche comparative en annexe 1), pour la focale de 200 mm, la distance d'observation doit être de 0,2 m * (99/23,5) = 0,84 m c'est-à-dire que le tirage doit être approximativement tenu à bout de (grands) bras. Pour comparer avec les images prises à la focale de 55 mm, il faut recadrer celles-ci de manière à conserver les angles.

Cette approche a le mérite de la simplicité théorique mais n'est pas celle usuellement adoptée dans la pratique. Il est en effet un peu déroutant de considérer qu'il « faut » regarder une photo à une distance différente suivant qu'elle a été prise avec telle ou telle focale.

En pratique, il est plus réaliste de raisonner plutôt sur une image plein cadre, tirée à une certaine taille DT et regardée à une certaine distance, quel que soit l'objectif employé.

Supposons que la distance d'observation soit constante et égale à la valeur calculée pour une focale de référence f_{ref} :

$$d_{obsref} = f_{ref} \frac{DT}{DC} .$$

Deux points très voisins, séparés de la distance s sur le tirage, vus sous l'angle $\alpha \approx s/d_{obs}$ à la distance d_{obs} seront alors vus sous l'angle $\alpha_{ref} \approx s/d_{obsref} = \alpha \cdot d_{obs}/d_{obsref} = \alpha \cdot f/f_{ref}$. Il en découle que :

$$\alpha \cdot f = \alpha_{ref} \cdot f_{ref} . \quad (3)$$

D'après le résultat (2) obtenu plus haut, dans lequel on remplace d_{MAP} par d_{Hyp} , lorsque la mise au point est à l'hyperfocale, le rayon de la tache image d'un point à l'infini est :

$$B'_{\infty Hyp} \approx \frac{D n \alpha N}{2} = \frac{n \alpha f}{2} \quad \text{donc son diamètre est} \quad c \approx 2 B'_{\infty Hyp} \approx n \alpha f .$$

Le résultat (3) signifie donc que lorsque la taille de tirage d'images prises à différentes focales est gardée constante, c'est en fait le diamètre de la tache image du point à l'infini pour un réglage à l'hyperfocale qui est conservé constant.

D'après le critère de séparabilité illustré par la figure 3, on voit que ce diamètre est aussi celui du « **cercle tel que, l'objectif étant mis au point à l'hyperfocale, si la tache représentative (dans le plan film) d'un point lumineux situé à l'infini est centrée dans ce cercle, alors la tache représentative d'un deuxième point lumineux à l'infini en sera indiscernable si le centre de cette deuxième tache est placée à l'intérieur du cercle** » ; dans cet énoncé, tous les mots sont importants ! Ce cercle est nommé **cercle de confusion**, par définition.

Comme le diamètre du cercle de confusion est égal à celui de l'image de la tache représentative d'un point situé à l'infini lorsque l'objectif est mis au point à l'hyperfocale, connu par le rayon

$$B'_{\infty Hyp} = \frac{f^2}{2 N d_{Hyp}} \quad , \text{ il vient qu'il s'exprime aussi par l'égalité suivante :}$$

$$c = \frac{f^2}{N d_{Hyp}} \quad .$$

Cette formule explique celle usuellement retenue pour la distance hyperfocale :

$$\boxed{d_{Hyp} = \frac{f^2}{N c}} \quad (4),$$

qui a l'inconvénient de faire perdre de vue la notion d'angle, sauf si l'on se rappelle que :

$$\boxed{c = n \alpha f} \quad . \quad (5)$$

Historiquement, la notion de cercle de confusion remonte au début du 20^{ème} siècle, à une époque où les grandes plaques 8x10 avaient certes une diagonale de l'ordre de 32 cm et, surtout, les chambres étaient dotées d'objectifs avec des focales du même ordre de grandeur.

Par ailleurs, le choix de la valeur de l'angle de résolution minimal connaît une certaine flexibilité puisqu'il résulte du critère de Rayleigh (mis au point par ce dernier à la fin du 19^{ème} siècle pour exprimer la limite de résolution due à la diffraction lumineuse par une pupille d'entrée). Celui-ci exprime que l'angle limite de résolution est donné en fonction de la longueur d'onde de la lumière λ et du diamètre δ de la pupille optique par :

$$\alpha = 1,22 \frac{\lambda}{\delta} \quad .$$

La valeur utilisée plus haut a été calculée pour une longueur d'onde de 580 nm et une pupille de l'œil au diamètre de 3 mm : $1,22 \cdot 580 \cdot 10^{-9} / 0,003 = 0,000235867$ rd. Cette valeur, combinée à une focale de 65 mm, conduit à un cercle de confusion de 30 μ m environ.

Cependant, la pupille de l'œil se dilate ou se contracte en fonction des conditions lumineuses, dans une gamme pouvant aller de 1 mm à 7 mm environ, et l'œil est sensible à une gamme de longueurs d'onde de 380 à 780 nm en étant surtout sensible à un intervalle allant – disons, pour fixer les idées – de 530 à 580 nm. Avec ces intervalles, on voit qu'une valeur de cet « angle de résolution minimal » pourrait être choisie entre 0,000 1 et 0,000 7. A une époque où une forte lumière solaire était requise pour prendre des photos, il est loisible d'admettre que les spécialistes ont tablé sur une pupille plutôt fermée, peut-être 2,5 mm et une longueur d'onde pas trop petite, peut-être 580 nm. Avec ces valeurs, l'angle de Rayleigh vaut 0,000283 rd, et la formule citée ci-dessus pour le diamètre du cercle de confusion donne, avec $n=2$ et une focale de 35 cm :

$$c = 2 * 0,000283 * 350 \text{ mm} = 0,198 \text{ mm} \quad ,$$

soit environ 0,2 mm.

Il apparaît que le cercle de confusion peut ainsi être calculé sans le détour par la dimension de l'image. C'est bien normal puisqu'il s'agit d'une notion essentiellement locale, concernant la possibilité de discerner des points voisins, et que la taille de l'image ne fait rien à l'affaire. Cependant, au fil du temps, des règles empiriques se sont dégagées pour stipuler qu'un cercle de confusion acceptable ne doit pas dépasser une certaine fraction de la taille de l'image, représentée par exemple par sa diagonale D , avec des règles pouvant fluctuer entre $D/1730$ (formule dite « de Zeiss ») et $D/1350$ (choix d'Olympus, semble-t-il, d'après l'observation présentée en annexe 2).

Influence des pixels

L'influence des pixels est négligeable tant que l'écart angulaire entre deux pixels voisins reste assez faible. Plus précisément, pour que les pixels ne soient pas résolus, l'écart angulaire entre eux doit rester inférieur à l'angle minimal de résolution.

Pour une observation à la distance D, la distance entre deux pixels doit rester inférieure à $0,000\ 235 * D$. Autrement dit, la résolution minimale de l'image doit être $r_{\min} = 1 \text{ px} / 0,000\ 235 * D$ soit

$$r_{\min} = 4255 \text{ px} / D.$$

Par ailleurs, une image se regarde usuellement à 2 ou 3 fois sa diagonale. Pour fixer les idées, il est ici supposé que la distance d'observation est le triple de la largeur :

$$D = 3L.$$

La résolution minimale de l'image est alors :

$$r_{\min} = 1418 \text{ px} / L.$$

Ceci revient à dire que la définition linéaire en largeur doit être supérieure à 1418 px.

Au format 3:2, la définition totale de l'image est ainsi environ 1,5 Mpx (seulement).

Pour une image au format A4, il vient $r_{\min} = 1418 \text{ px} / 297 \text{ mm} = 4,8 \text{ px} / \text{mm}$ (environ 120 dpi).

Une résolution double (10 px/mm ou 250 dpi environ) permet de regarder l'image sans distinguer les pixels à 1,5L soit 45 cm pour un A4, 90 cm pour un format 60cm x 40 cm.

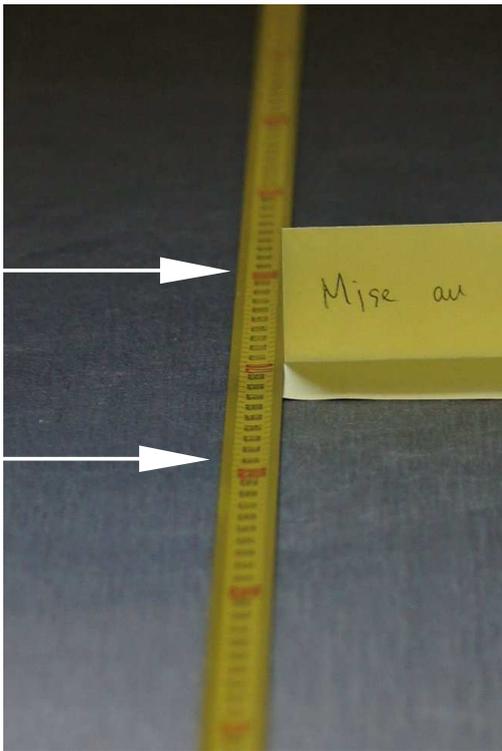
O-O
·|·
≡°≡

Annexes

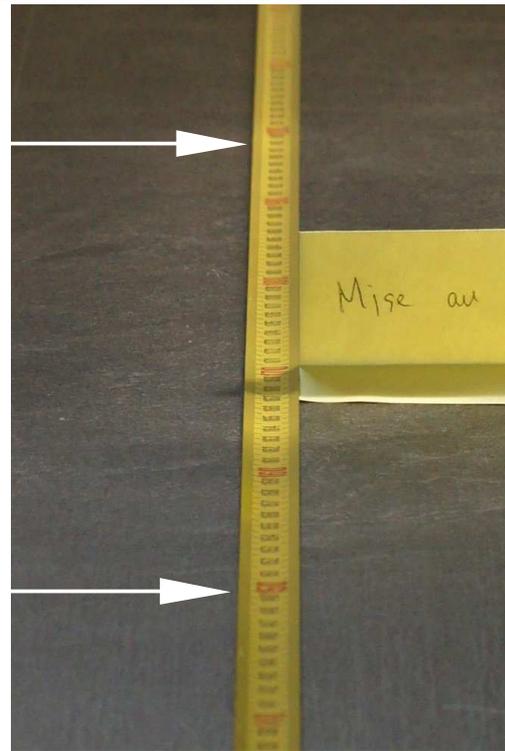
Annexe 1 : comparaison théorie – expérience

Annexe 2 : l'hyperfocale par la bague de mise au point

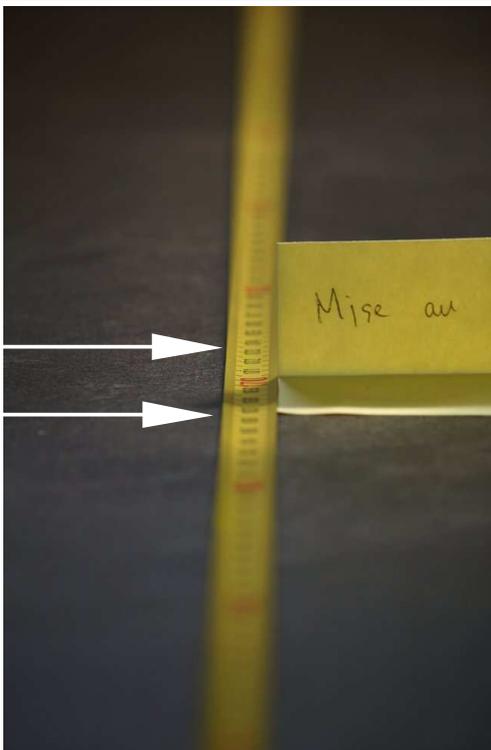
Annexe 1 : comparaison théorie – expérience (critère angulaire)



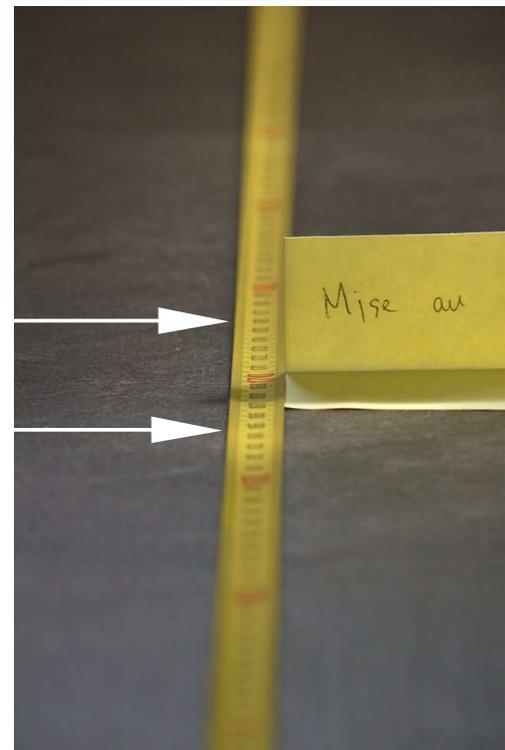
$d_{MAP} = 1,7 \text{ m}$; $f = 55 \text{ mm}$; $N = F4$
 Netteté théorique = 1,610 m – 1,801 m



$d_{MAP} = 1,7 \text{ m}$; $f = 55 \text{ mm}$; $N = F10$
 Netteté théorique = 1,492 m – 1,979 m



$d_{MAP} = 1,7 \text{ m}$; $f = 200 \text{ mm}$; $N = F5.6$
 Netteté théorique = 1,668 m – 1,733 m



$d_{MAP} = 1,7 \text{ m}$; $f = 200 \text{ mm}$; $N = F10$
 Netteté théorique = 1,645 m – 1,760 m

Calculs avec $\alpha = 0,000235 \text{ rd}$. Observer cette planche à 84 cm. Les 2 images du haut ont une définition 870 x 1300 pixels (résolution de 13 px/mm sur cette page en A4), les 2 du bas font 3000 x 4500 px (45 px/mm).

Annexe 2 : l'hyperfocale par la bague de mise au point

Les objectifs à focale fixe de « l'ancien temps » comportaient systématiquement une échelle de profondeur de champ utilisable en calculateur d'hyperfocale.

Les photos suivantes la montrent sur un 50 mm et un 135 mm d'Olympus, l'objectif étant réglé sur la mise au point à l'hyperfocale pour deux ouvertures dans chaque cas.



D'après les deux premières vues, l'hyperfocale du 50 mm à F11 est un peu inférieure à :

$$5 * 16 / 11 = 7,3 \text{ m, disons } 7 \text{ m.}$$

Le rapport entre les deux focales est 2,7, son carré est : 7,3. Donc pour le second objectif à F22, on peut calculer les deux quantités suivantes :

« Hyperfocale * rapport de $f / 2 = 9,5 \text{ m}$ » et « Hyperfocale * (rapport de f)² / 2 = 25,5 m ».

Cette deuxième valeur concorde avec la valeur lue. Ceci montre que les concepteurs de Olympus ont utilisé la deuxième égalité et, par conséquent, considéré que l'hyperfocale était proportionnelle au carré de la focale : ils ont donc admis que le cercle de confusion était constant, selon l'usage.

En choisissant pour le cercle de confusion la valeur $c = 32 \mu\text{m}$, les valeurs théoriques (avec $n=2$) de l'hyperfocale correspondant aux 4 situations ci-dessus sont données dans le tableau suivant.

50 mm à F:16 hyperfocale $\approx 4,88 \text{ m}$	50 mm à F:8 hyperfocale $\approx 9,77$
135 mm à F:22 hyperfocale $\approx 25,89 \text{ m}$	135 mm à F:11 hyperfocale $\approx 51,78$

Compte tenu de l'imprécision de la bague de distance, l'accord est bon et valide l'interprétation. La diagonale du 24x36 étant de 43,3 mm, on constate que les ingénieurs d'Olympus ont adopté la règle $c = D/1350$. Par ailleurs, l'angle de résolution associé à cette valeur de cercle de confusion est $\alpha = c/2f$, soit 0,00032 rd pour le 50 mm et 0,00012 rd pour le 135 mm. La valeur habituelle de $\alpha = 0,000235 \text{ rd}$ utilisée en ophtalmologie correspond à une focale de 68 mm. Cette valeur peut être interprétée comme une valeur moyenne choisie comme référence par Olympus, en cohérence avec l'observation d'un tirage A4 à $68 * 297 / 36 = 561 \text{ mm}$, c'est-à-dire à bout de bras.

Avec une règle arrondie et un peu plus exigeante, par exemple $c \approx D/1500$, les cercles de confusion pour les appareils numériques modernes valent à peu près :

- pour les compacts à petits capteurs de diagonale 7 à 10 mm : $c \approx 6 \mu\text{m}$,
- pour les « micro 4/3 » et hybrides de diagonale 21,6 mm : $c \approx 15 \mu\text{m}$,
- pour les APS qui arment les réflexes amateurs, de diagonale 25 à 28 mm : $c \approx 20 \mu\text{m}$,
- pour les capteurs « plein format » 24x36, de diagonale 43,3 mm : $c \approx 30 \mu\text{m}$.